



Komputery

Wersja: 8 z drobnymi modyfikacjami!

Wojciech Myszka

2023-11-11 08:58:20 +0100



HR EXCELLENCE IN RESEARCH



Politechnika Wroclawska

Odrobina historii matematyki

Jak liczono kiedyś

- ▶ używając części ciała (na palcach),
- ▶ nacięcia (karby) na kiju, kości,...
- ▶ węzły na sznurkach, przedmioty zgromadzone w pojemniku, sakiewce,
- ▶ na grupach (po dwa, po dwanaście,... : para, tuzin, kopa, gros – 144 czyli $12 \cdot 12$, mendel (15),...)



Odrobina historii matematyki I



1. Babilończycy — system pozycyjny przy podstawie 60; nie znali zera; zostawiali miejsce puste,
2. Chiny — właściwie system dziesiętny, ale bez zera, cyfry zapisywane w sposób addytywny, zapis cyfr za pomocą „pałeczek”: jedności „stojąco”, dziesiątki „leżący”, setki stojąco, tysiące leżący, itd. Zнали ułamki.

—	=	≡	≡≡	≡≡≡	⊥	⊥	⊥	⊥
1	2	3	4	5	6	7	8	9
					⊥	⊥	⊥	⊥
1	2	3	4	5	6	7	8	9



Odrobina historii matematyki II

3. Majowie — układ pozycyjny przy podstawie 20. Ciekawy zapis liczb mniejszych od 20: addytywny za pomocą kombinacji symboli 1 i 5

0	1	2	3	4
	•	••	•••	••••
5	•	••	•••	••••
—	•	••	•••	••••
10	•	••	•••	••••
==	•	••	•••	••••
15	•	••	•••	••••
===	•	••	•••	••••
20	•	••	•••	••••
•	•	••	•••	••••
	•	••	•••	••••
25	•	••	•••	••••
•	•	••	•••	••••
—	•	••	•••	••••
26	•	••	•••	••••
•	•	••	•••	••••
—	•	••	•••	••••
27	•	••	•••	••••
•	•	••	•••	••••
—	•	••	•••	••••
28	•	••	•••	••••
•	•	••	•••	••••
—	•	••	•••	••••
29	•	••	•••	••••
•	•	••	•••	••••
—	•	••	•••	••••

Mayan positional number system



Odrobina historii matematyki III

4. Indie — wprowadzili współczesny dziesiętny system pozycyjny i wprowadzili do niego zero.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
—	=	≡	+	h	५	७	५	१
Brahmi numerals around 1st century A.D.								



Odrobina historii matematyki IV

1	2	3	4	5	6	7	8	9
—	=	≡	𑆑	𑆒	𑆓	𑆔	𑆕	𑆖
Gupta numerals around 4th century A.D.								

1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
𑆗	𑆘	𑆙	𑆚	𑆛	𑆜	𑆝	𑆞	𑆟	𑆠
Nagari numerals around 11th century A.D.									



Odrobina historii matematyki V

5. Arabowie — Nadali cyfrom ostateczną formę, system upowszechnili.

Brahmi	↓		—	=	≡	+	୮	୯	୭	୫	୪
Hindu	↓	୦	୧	୨	୩	୪	୫	୬	୭	୮	୯
Arabic	↓	•	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩
Medieval	↓	0	I	2	3	୧	୨	6	୧	8	9
Modern		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

© G. Sarcone, www.archimedes-lab.org



Odrobina historii matematyki VI

6. Europa — cyfry przyjęta od Arabów, ale ostateczna forma ewoluowała dosyć długo:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
<i>Rękopis z 976 r.</i>	I	∩	∩	∩	∩	∩	∩	∩	∩	
<i>Rękopis z początków XII w.</i>	1	∩	∩	∩	∩	∩	∩	∩	∩	0
<i>Rękopis dzieła Sacrobosco z 1442 r.</i>	1	2	3	∩	∩	∩	∩	∩	∩	0
<i>Cyfry A. Dürera z 1525 r.</i>	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
<i>Z wydanego drukiem dzieła Widmanna z 1489 r.</i>	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0



Liczby rzymskie I

Liczby rzymskie były w Europie dosyć długo (tak do XIV wieku) w powszechnym użyciu. Ich główną wadą (oprócz addytywności) jest brak zera (choć znaleziono co najmniej jeden zapis z użyciem litery N [nullo] jako zera). Liczby rzymskie są „pociotkiem” systemu używanego przez Etrusków.



Liczby rzymskie II

Symbols and Values of the Etruscan numbers

I	I (1)
A	V (5)
X	X (10)
↑	L (50)
C ✖	C (100)
⊙	D (500) ∘ M (1000)
⊙	M (1000) ∘ \bar{M} (10.000) ?



Liczby rzymskie III

Ułamki, szły jakoś tak:

$$- \quad 1/12$$

$$= \quad 2/12 \text{ or } 1/6$$

$$- = \quad 3/12\text{ths or } 1/4$$

$$== \quad 4/12\text{ths or } 1/3$$

$$- == \quad 5/12\text{ths}$$

$$S \quad 1/2$$

$$S - \quad 1/2 \text{ plus } 1/12\text{th or } 7/12\text{ths}$$

$$S = \quad 1/2 \text{ plus } 2/12\text{ths or } 2/3$$

$$S - = \quad 1/2 \text{ plus } 3/12\text{ths or } 3/4$$

$$S == \quad 1/2 \text{ plus } 4/12\text{ths or } 5/6$$

$$S - == \quad 1/2 \text{ plus } 5/12\text{ths or } 11/12\text{ths}$$



Odrobina historii matematyki

Systemy liczbowe

- ▶ addytywne (na przykład rzymski czy wcześniejszy hieroglificzny) wartość liczby jest sumą wartości znaków
- ▶ pozycyjne (na przykład dziesiętny) wartość znaków zależy od ich położenia w liczbie.



Odrobina historii matematyki

Systemy liczbowe

- ▶ addytywne (na przykład rzymski czy wcześniejszy hieroglificzny) wartość liczby jest sumą wartości znaków
- ▶ pozycyjne (na przykład dziesiętny) wartość znaków zależy od ich położenia w liczbie.

1234



Odrobina historii matematyki

Systemy liczbowe

- ▶ addytywne (na przykład rzymski czy wcześniejszy hieroglificzny) wartość liczby jest sumą wartości znaków
- ▶ pozycyjne (na przykład dziesiętny) wartość znaków zależy od ich położenia w liczbie.

1234

MCCXXXIV



Odrobina historii matematyki

Systemy liczbowe

- ▶ addytywne (na przykład rzymski czy wcześniejszy hieroglificzny) wartość liczby jest sumą wartości znaków
- ▶ pozycyjne (na przykład dziesiętny) wartość znaków zależy od ich położenia w liczbie.

1234

MCCXXXIV

- ▶ System addytywny utrudnia wielce wykonywanie jakichkolwiek obliczeń.



Podstawa systemu liczbowego

1. Systemy pozycyjne zawsze korzystają z jakiejś podstawy służącej do rozwijania wartości liczb.
2. Najczęściej korzystamy z systemu dziesiętnego:

$$1234.56 =$$



Podstawa systemu liczbowego

1. Systemy pozycyjne zawsze korzystają z jakiejś podstawy służącej do rozwijania wartości liczb.
2. Najczęściej korzystamy z systemu dziesiętnego:

$$1234.56 = 1 * 10^3$$



Podstawa systemu liczbowego

1. Systemy pozycyjne zawsze korzystają z jakiejś podstawy służącej do rozwijania wartości liczb.
2. Najczęściej korzystamy z systemu dziesiętnego:

$$1234.56 = 1 * 10^3 + 2 * 10^2$$



Podstawa systemu liczbowego

1. Systemy pozycyjne zawsze korzystają z jakiejś podstawy służącej do rozwijania wartości liczb.
2. Najczęściej korzystamy z systemu dziesiętnego:

$$1234.56 = 1 * 10^3 + 2 * 10^2 + 3 * 10^1 +$$



Podstawa systemu liczbowego

1. Systemy pozycyjne zawsze korzystają z jakiejś podstawy służącej do rozwijania wartości liczb.
2. Najczęściej korzystamy z systemu dziesiętnego:

$$1234.56 = 1 * 10^3 + 2 * 10^2 + 3 * 10^1 + 4 * 10^0$$



Podstawa systemu liczbowego

1. Systemy pozycyjne zawsze korzystają z jakiejś podstawy służącej do rozwijania wartości liczb.
2. Najczęściej korzystamy z systemu dziesiętnego:

$$1234.56 = 1 * 10^3 + 2 * 10^2 + 3 * 10^1 + 4 * 10^0 + 5 * 10^{-1}$$



Podstawa systemu liczbowego

1. Systemy pozycyjne zawsze korzystają z jakiejś podstawy służącej do rozwijania wartości liczb.
2. Najczęściej korzystamy z systemu dziesiętnego:

$$1234.56 = 1 * 10^3 + 2 * 10^2 + 3 * 10^1 + 4 * 10^0 + 5 * 10^{-1} + 6 * 10^{-2}$$



Podstawa systemu liczbowego

1. Systemy pozycyjne zawsze korzystają z jakiejś podstawy służącej do rozwijania wartości liczb.
2. Najczęściej korzystamy z systemu dziesiętnego:

$$1234.56 = 1 * 10^3 + 2 * 10^2 + 3 * 10^1 + 4 * 10^0 + 5 * 10^{-1} + 6 * 10^{-2}$$

3. Jaki system używany jest do zapisu kątów?



Podstawa systemu liczbowego

1. Systemy pozycyjne zawsze korzystają z jakiejś podstawy służącej do rozwijania wartości liczb.
2. Najczęściej korzystamy z systemu dziesiętnego:

$$1234.56 = 1 * 10^3 + 2 * 10^2 + 3 * 10^1 + 4 * 10^0 + 5 * 10^{-1} + 6 * 10^{-2}$$

3. Jaki system używany jest do zapisu kątów?
4. 4D2.8F5C28F5C to 1234,56 zapisane w układzie szesnastkowym (w przybliżeniu).



Obliczenia

- ▶ Bardzo wczesnie pojawiła się też potrzeba prowadzenia obliczeń.
- ▶ Korzystano w tym celu z:
 - ▶ liczydeł (abakus),
 - ▶ różnych urządzeń mechanicznych (pascalina, arytmometr),
 - ▶ urządzeń analogowych (suwak logarytmiczny).
- ▶ W XIX wieku pojawiły się pomysły „mechanizacji” obliczeń (Babbage: differential engine, analitical engine).



Automatyzacja obliczeń

Założmy, że mamy do rozwiązania abardzo proste równanie:

$$4x + 3 = 12$$

Metoda postępowania może być taka:



Automatyzacja obliczeń

Założmy, że mamy do rozwiązania abardzo proste równanie:

$$4x + 3 = 12$$

Metoda postępowania może być taka:

1.

$$4x = 12 - 3$$



Automatyzacja obliczeń

Założmy, że mamy do rozwiązania abardzo proste równanie:

$$4x + 3 = 12$$

Metoda postępowania może być taka:

2.

$$4x = 9$$



Automatyzacja obliczeń

Założmy, że mamy do rozwiązania abardzo proste równanie:

$$4x + 3 = 12$$

Metoda postępowania może być taka:

3.

$$x = \frac{9}{4}$$



Automatyzacja obliczeń

Założmy, że mamy do rozwiązania abardzo proste równanie:

$$4x + 3 = 12$$

Metoda postępowania może być taka:

1.

$$4x = 12 - 3$$

2.

$$4x = 9$$

3.

$$x = \frac{9}{4}$$

Rozwiązaliśmy konkretny problem!



Automatyzacja obliczeń — przypadek ogólny

Założmy, że mamy do rozwiązania abardzo proste równanie:

$$ax + b = c$$

Metoda postępowania może być taka:



Automatyzacja obliczeń — przypadek ogólny

Założmy, że mamy do rozwiązania abardzo proste równanie:

$$ax + b = c$$

Metoda postępowania może być taka:

1.

$$ax = c - b$$



Automatyzacja obliczeń — przypadek ogólny

Założmy, że mamy do rozwiązania abardzo proste równanie:

$$ax + b = c$$

Metoda postępowania może być taka:

2.

$$x = \frac{c - b}{a}$$



Automatyzacja obliczeń — przypadek ogólny

Założmy, że mamy do rozwiązania abardzo proste równanie:

$$ax + b = c$$

Metoda postępowania może być taka:

2.

$$x = \frac{c - b}{a}$$

Zatem należy od c odjąć b , a uzyskany wynik podzielić przez a . Dostajemy metodę rozwiązywania **wszystkich** zadań tej postaci!



Automatyzacja obliczeń, cd

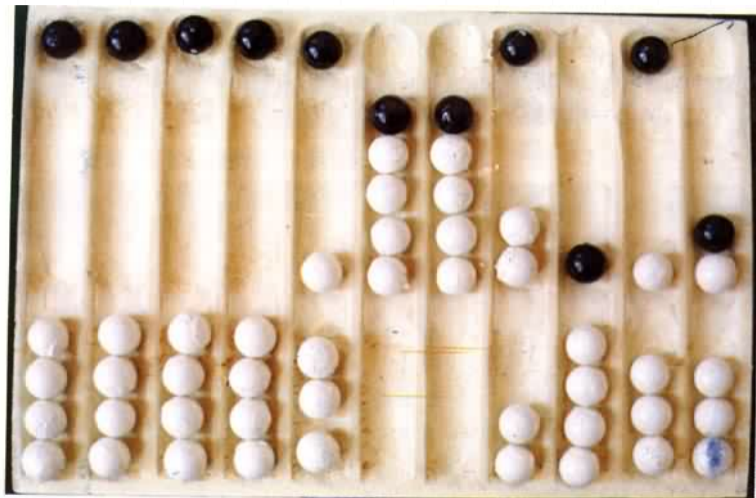
Znając matematykę, znajdziemy tam ogromne ilości „sposobów” na rozwiązywanie różnych mniej lub bardziej praktycznych problemów.

Pozostaje tylko problem jak *nasze urządzenie liczące* zagonić do takiej roboty?

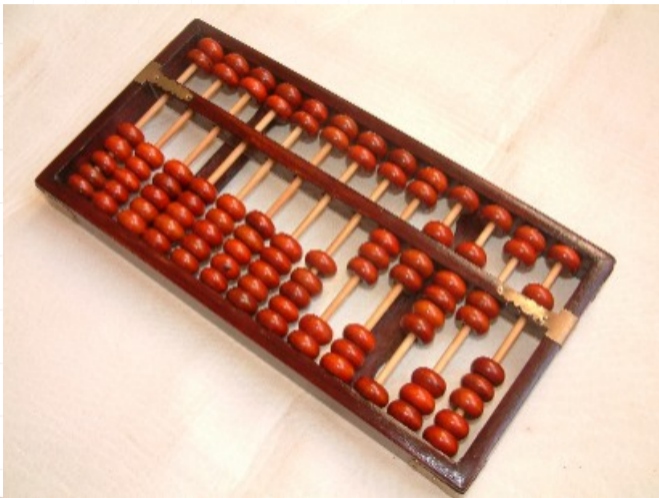
- ▶ abakus
- ▶ liczydło?
- ▶ „mechaniczny kalkulator” (arytmometr)
- ▶ ...



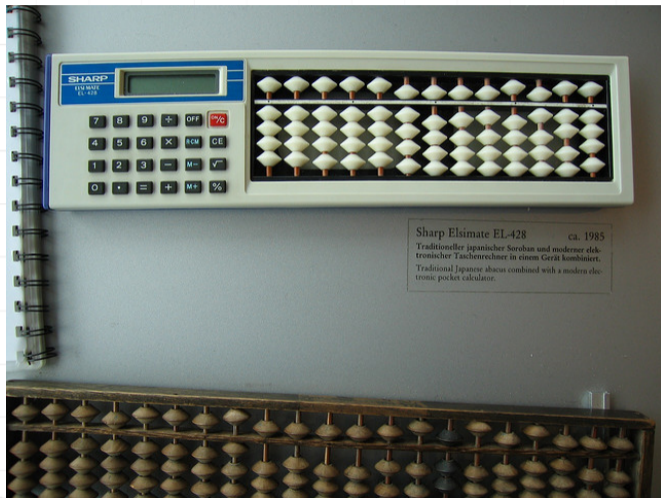
(Starodawne) Urządzenia liczące



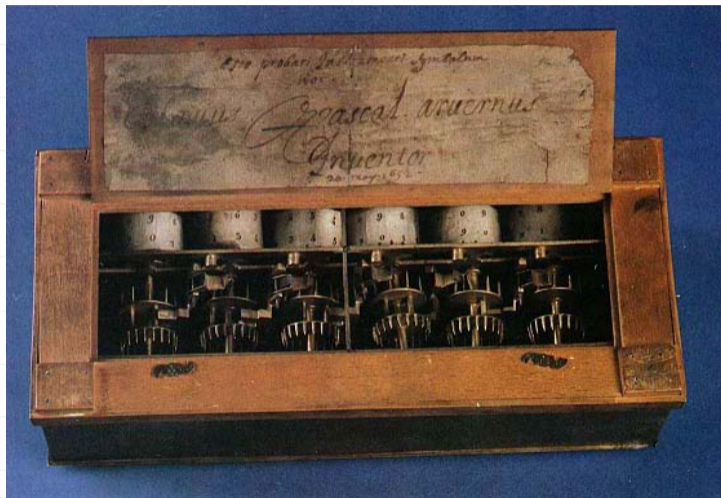
(Starodawne) Urządzenia liczące



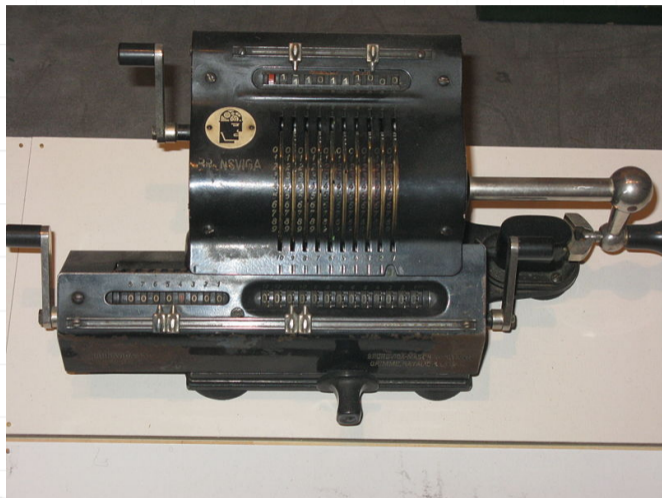
(Starodawne) Urządzenia liczące



(Starodawne) Urządzenia liczące



(Starodawne) Urządzenia liczące



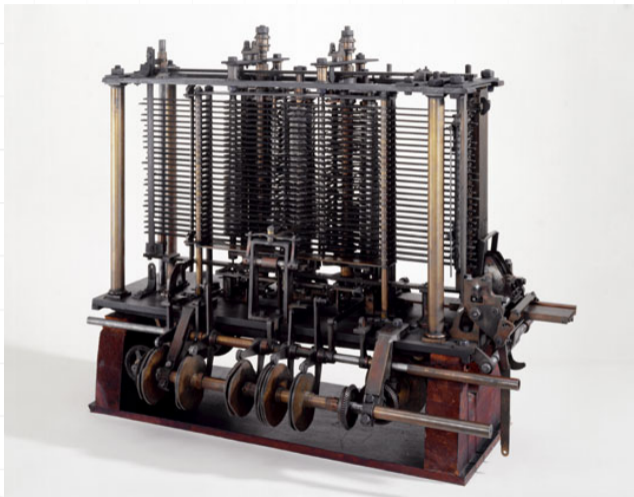
(Starodawne) Urządzenia liczące



(Starodawne) Urządzenia liczące



(Starodawne) Urządzenia liczące



Automatyczne urządzenia...

1. ...grające: pianola
2. ...tkające: krosno zakarda (Jacquard loom)
3. ...liczące: maszyna analityczna, maszyna różniczkująca (analytical engine, differential engine — Charles Babbage)



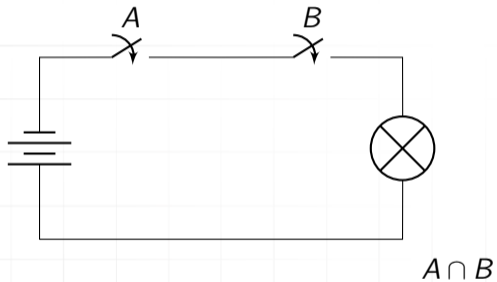
Podstawy

1. Układ dwójkowy (prąd płynie — prąd nie płynie)
2. Logika Bool'a
3. Podstawowe elementy wykonawcze:
 - ▶ przekaźnik,
 - ▶ lampa elektronowa,
 - ▶ tranzystor,
 - ▶ bramka (N)AND/(N)OR,



Operacje logiczne

Iloczyn logiczny

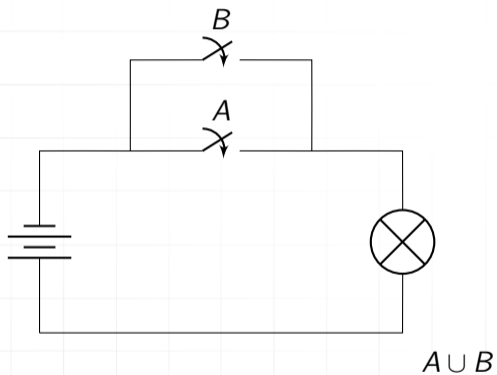


AND	0	1
0	0	0
1	0	1



Operacje logiczne

Suma logiczna



OR	0	1
0	0	1
1	1	1



Operacje logiczne

Różnica symetryczna

XOR	0	1
0	0	1
1	1	0

$$A \oplus B$$



Operacje logiczne

Różnica symetryczna

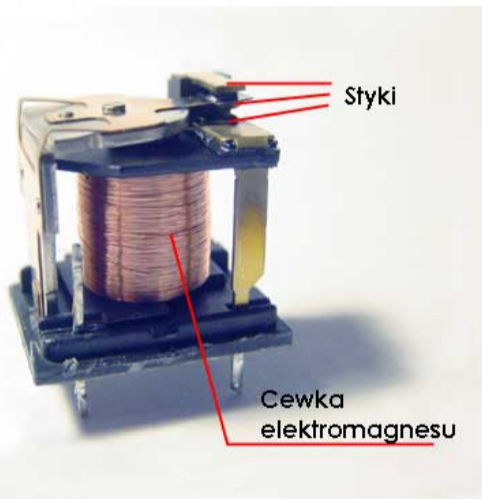
XOR	0	1
0	0	1
1	1	0

\bar{A} — negacja

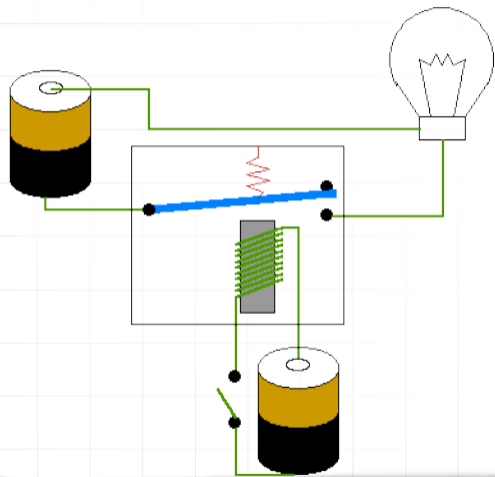
$$A \oplus B = (\bar{A} \cap B) \cup (A \cap \bar{B})$$



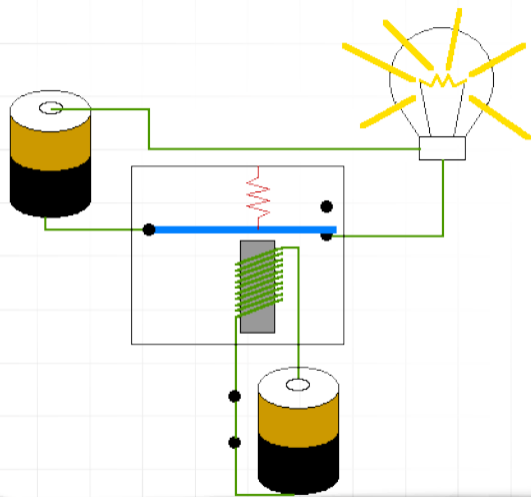
Przełącznik



Przełącznik

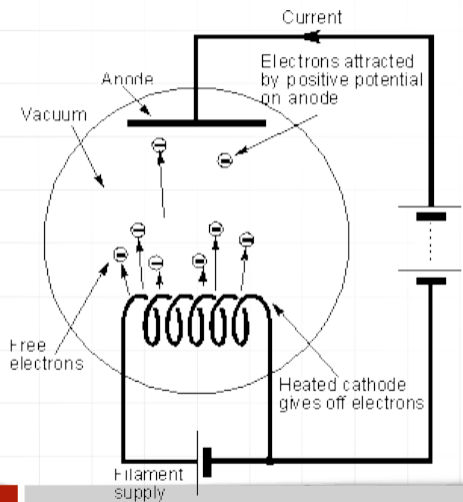


Przełącznik



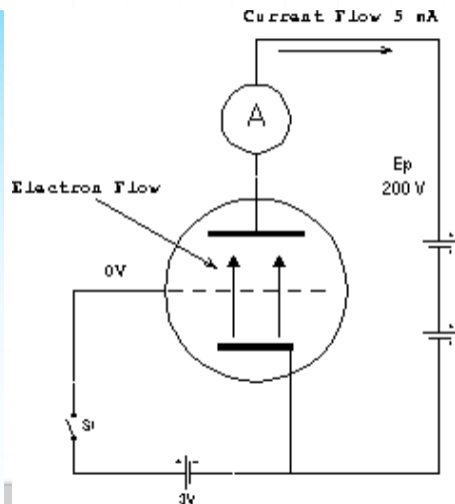
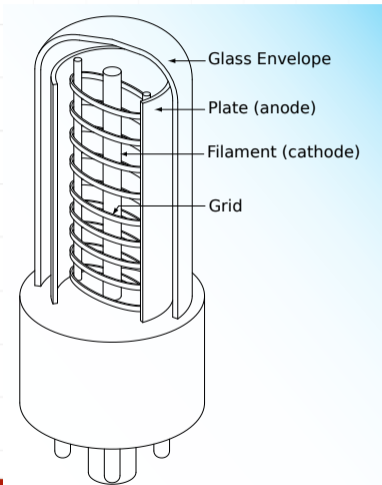
Lampy elektronowe

Dioda



Lampy elektronowe

Trioda



Liczby

1. Dwie wartości: prąd płynie/prąd nie płynie.
2. Dwie cyfry: 0, 1.
3. Pozycyjny zapis liczb.
4. Przykład

$$1010_{(2)} = 1 * 2^3 + 0 * 2^2 + 1 * 2^1 + 0 * 2^0 = 10_{(10)}$$



Liczby

1. Dwie wartości: prąd płynie/prąd nie płynie.
2. Dwie cyfry: 0, 1.
3. Pozycyjny zapis liczb.
4. Przykład

$$1010,01_{(2)} = 1 * 2^3 + 0 * 2^2 + 1 * 2^1 + 0 * 2^0 + 0 * \frac{1}{2} + 1 * \frac{1}{4} = 10,25_{(10)}$$



Liczby

1. Dwie wartości: prąd płynie/prąd nie płynie.
2. Dwie cyfry: 0, 1.
3. Pozycyjny zapis liczb.
4. Przykład

$$1010,01_{(2)} = 1 * 2^3 + 0 * 2^2 + 1 * 2^1 + 0 * 2^0 + 0 * \frac{1}{2} + 1 * \frac{1}{4} = 10,25_{(10)}$$



Operacje arytmetyczne

Półsumator, czyli: Jak procesor dodaje?

1. Układ dwójkowy — dwie wartości:
0, 1.



Operacje arytmetyczne

Półsumator, czyli: Jak procesor dodaje?

1. Układ dwójkowy — dwie wartości: 0, 1.
2. Suma dwu bitów ($Y = X_1 + X_2$)
3. Przeniesienie (C_{out})
4. „Tabela prawdy”

X_1	X_2	Y	C_{out}
0	0	0	0
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	0	1

$$Y = X_1 \oplus X_2$$

$$C_{out} = X_1 \cap X_2$$



Operacje arytmetyczne

Sumator, czyli Jak procesor dodaje?

C_{in}	X_1	X_2	Y	C_{out}
0	0	0	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	0	1
1	1	0	0	1
1	1	1	1	1

$$Y = C_{in} \oplus (X_1 \oplus X_2)$$

$$C_{out} = (X_1 \cap X_2) \cup (C_{in} \cap (X_1 \oplus X_2))$$



Literatura pomocnicza I



AFP.

Polish weavers keep "Jacquard" tradition alive, September 2009.

<http://www.youtube.com/watch?v=iWW6ypeQYPM>.



Charles Babbage.

Passages from the life of a philosopher.

Longman, Green, Longman, Roberts, & Green, 1864.

<http://books.google.pl/books?id=Fa1JAAAAMAAJ&q&f=false>.



weaverstaceyuk.

Jacquard loom walkthrough, March 2010.

<http://www.youtube.com/watch?v=f1Zzj9ZBYmQ>.



Krzysztof Zanussi.

Komputery zanussiego, October 2010.

https://www.youtube.com/watch?v=_C-Cm_I2m00.

