Politechnika Wrocławska

Wykład 12

Zastosowanie programu MATLAB w zagadnieniach inżynierskich

Wojciech Myszka

Katedra Mechaniki, Inżynierii Materiałowej i Biomedycznej

grudzień 2022

HR EXCELLENCE IN RESEARCH

Politechnika Wrocławska

1. Lepszy wielowymiarowych przykład danych kategorycznych (statystyka dokończenie)
2. Interpolacja (szybkie przypomnienie)
3. FFT

Lepszy wielowymiarowych przykład danych kategorycznych (statystyka dokończenie)

Politechnika Wrocławska

samochody I

1. Wraz z MATLABem dostajemy przykładowe zestawy danych.
2. Należą do nich `carsmall` i `carbig`
3. pierwszy zawiera informacje o stu konkretnych modelach samochodów, drugi o czterystu
4. Zapisane tam parametry to:
   - przyśpieszenie
   - liczba cylindrów
   - pojemność skokowa
   - moc silnika
   - wytwórca
   - model samochodu
   - rok

samochody II

- zużycie paliwa (w milach z galona, bo to USA)
- kraj pochodzenia
- waga

Dane te (w pewnym sensie) opisują obiekt, którym jest *jakiś samochód*

Dane są wielowymiarowe i nie da się łątwo pokazać zależności parametrów samochodu od innych jego cech.

gplotmatrix() I

1. Funkcja `gplotmatix()` pozwala pokazać zależności różnych numerycznych parametrów
2. Jej wywołanie nie jest bardzo proste
3. ale efekty są interesujące
4. Wybieramy zestaw danych `carsmall`

```
load carsmall
X = [Acceleration Displacement Horsepower MPG Weight];
xnames = {'Acceleration','Displacement','Horsepower','MPG','Weigh
[h,ax] = gplotmatrix(X,[],Cylinders,[],[],[],[],'variable',xnames
title('Car Data')
```

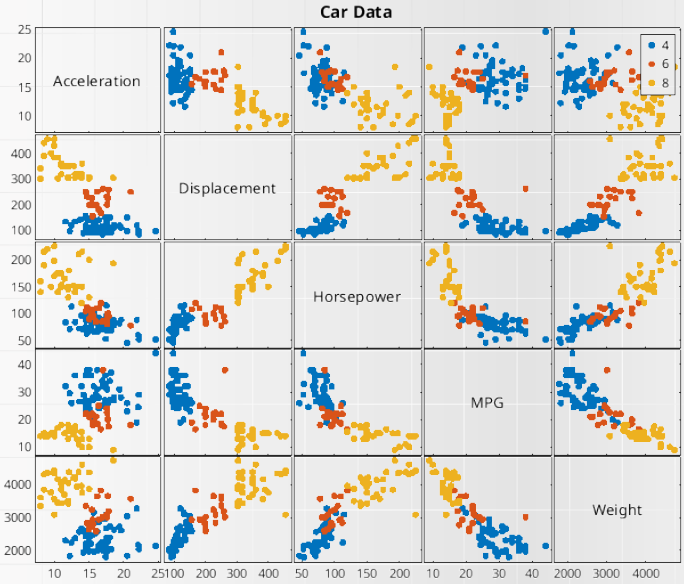
- `x` to numeryczne parametry, które będą obrazowane na tym wykresie
- `xnames` ich ludzkie nazwy

Politechnika Wrocławska

gplotmatrix() II

- trzeci parametr funkcji `gplotmatric` oznacza dodatkowe grupowanie kolorami w zależności od liczby cylindrów
- na jednym wykresie dostajemy zależności między sześcioma zmiennymi numerycznymi

gplotmatrix() III



Interpolacja (szybkie przypomnienie)

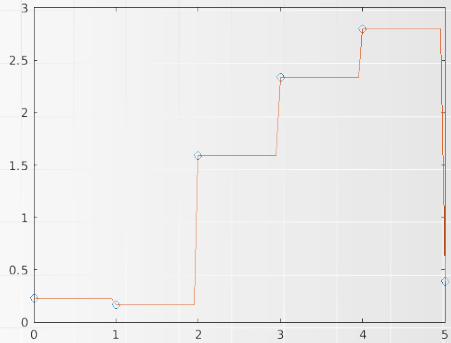
Politechnika Wrocławska

Do czego jest interpolacja? I

1. Wyobraźmy sobie taką sytuację:
   - autonomiczne urządzenie pomiarowe wykonuje pomiary i przesyła je do komputera;
   - odbiorcy w swoim tempie pytają o dane;
   - komputer zawsze odpowiada ostatnio otrzymanym pomiarem.

   Odpowiada to `vq = interp1(x,v,xq,'previous')`

Do czego jest interpolacja? II



2. Mamy pomiary wykonane z zadanym krokiem próbkowania. Każdy pomiar ma współrzędną czasową.
3. Interesują nas wartości w punktach „pośrednich”

Politechnika Wrocławska

Do czego jest interpolacja? III

4. Jaką przyjąć strategię?
   - `previous`
   - `nearest`
   - `linear`

   Wydaje się, że inne strategie mogą być zbyt wydumane, ale warto pamiętać o `pchip`, które stara się najlepiej zachować kształt

Do czego jest interpolacja? IV

Podsumowując

Interpolacja przyda się:

- gdy chcemy „mieć” wartość przebiegu jakiegoś zjawiska **między** punktami pomiarowymi
- chcemy racjonalnie zmniejszyć liczbę danych
- chcemy dostać przebieg próbkowany ze stałym krokiem (gdy pomiary nie były takie)
- ...

Politechnika Wrocławska

FFT

Twierdzenie o próbkowaniu

1. Znane jest również pod nazwą Twierdzenia Shannona-Kotielnikowa
2. Zaangażowanych naukowców było nawet więcej: Whittaker, Nyquist, Kotielnikow, Shannon.
3. Mówi ono tyle, że **aby możliwe było jednoznaczne odtworzenie sygnału na podstawie próbek, próbki te muszą być pobierane z częstotliwością co najmniej dwa razy większą od maksymalnej częstotliwości widma sygnału**.
4. Przykładowo dla częstotliwości próbkowania 44,1 kHz stosowanej na płytach CD częstotliwość Nyquista[1] wynosi 22,05 kHz. Jeśli w sygnale analogowym obecne są składowe o częstotliwości wyższej od częstotliwości Nyquista, spowoduje to powstanie błędów próbkowania (aliasing). Przeciętne ludzkie ucho nie słyszy częstotliwości wyższych niż 20 kHz, dlatego te składowe sygnału audio są usuwane przed próbkowaniem poprzez zastosowanie filtru dolnoprzepustowego.

[1] Czyli maksymalna, możliwa do odtworzenia częstotliwość sygnału.

Politechnika Wrocławska

Szybka transformata Fouriera I

1. *Fast Fourier Transform*
2. To rozkład przebiegu czasowego (funkcji w przestrzeni funkcyjnej) na składowe (podobnie jak wektora w przestrzeni wielowymiarowej na wersory).
3. Bardzo podobnie rozkładamy funkcje korzystając ze zwykłych wielomianów $(1, x, x^2, x^3, \ldots)$ **szeregi!**
4. W przypadku transformaty Fouriera, funkcjami są (w uproszczeniu) $1, e^z, e^{2z}, e^{3z}, \ldots$, gdzie z należy do przestrzeni liczb zespolonych.
5. Obowiązują wszelkie intuicje związane z przestrzenią wektorową, liniową (nie)zależnością wektorów, prostopadłością wektorów.

Szybka transformata Fouriera II

6. Ponieważ e^z (gdy z przyjmuje wartości zespolone) jest okresowa

$$e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos(y) + i\sin(y))$$

(i to jednostka urojona)

stosujemy TF do przebiegów okresowych.

Politechnika Wrocławska

Formalna definicja Ciągłej Transformaty Fouriera

Dla funkcji $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ (należącej do przestrzeni funkcji całkowalnych na $\mathbb{R}^n$) Transformata Fouriera to

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\ e^{-2\pi i(x,\xi)}\, dx$$

gdzie (x, ξ) to iloczyn skalarny wektorów $x \in \mathbb{R}^n$ oraz $\xi \in \mathbb{R}^n$

Transformata Fouriera w pakiecie symbolicznym

```
syms t
fourier(sin(t))
```

A efekt

$$\pi\left(\delta\left(w-1\right)-\delta\left(w+1\right)\right)\mathrm{i}$$

lub w wersji nie-symbolicznej

```
-pi*(dirac(w - 1) - dirac(w + 1))*1i
```

(w to odpowiednik ξ, i to jednostka urojona, ponieważ bierzemy funkcję *sinus* to wynik jest urojony!)

Politechnika Wrocławska

Formalna definicja Dyskretnej Transformaty Fouriera

Niech $x_0, x_1, \ldots, x_{N-1}$ będą liczbami zespolonymi. DTF (Dyskretną transformatą Fouriera) dla tych liczb są wartości

$$X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-i2\pi kn/N} \qquad k = 0, 1, \ldots, N-1$$

Szybka Transformata Fouriera (FFT)

- Obliczenia według wzoru definicyjnego

$$X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-i2\pi kn/N} \qquad k = 0, 1, \ldots, N-1$$

wymagają wykonania sporej liczby operacji.

- Zauważono (Cooley, Tukey), że uwzględniając pewne regularności i zakładając, że liczba próbek pomiarowych wyraża się jako potęga dwójki — obliczenia można znacznie przyśpieszyć.
- Algorytm nazywa się *Fast Fourier Transform* (FFT).
- Działa również dobrze, gdy liczba próbek nie jest potęgą dwójki.

 (notatnik FFT)

Dyskretna transformata Fouriera I

W MATLABie Szybką Transformatę Fouriera realizuje funkcja `fft()`.

Funkcję *cosinus* próbkuję 8 razy na okres:

```
x = 0:pi/4:6.2;
a = cos(x);
y = fft(a)
```

w wyniku otrzymujemy

```
y =
  -0.0000 + 0.0000i   4.0000 - 0.0000i   0.0000 + 0.0000i
  -0.0000 - 0.0000i   0.0000 + 0.0000i  -0.0000 + 0.0000i
   0.0000 + 0.0000i   4.0000 + 0.0000i
```

Mieliśmy osiem pomiarów, otrzymaliśmy osiem współczynników Fouriera

Dyskretna transformata Fouriera II

- pierwszy z nich to wartość średnia przebiegu (zero w naszym przypadku)
- kolejnych 7 wartości to współczynniki transformaty

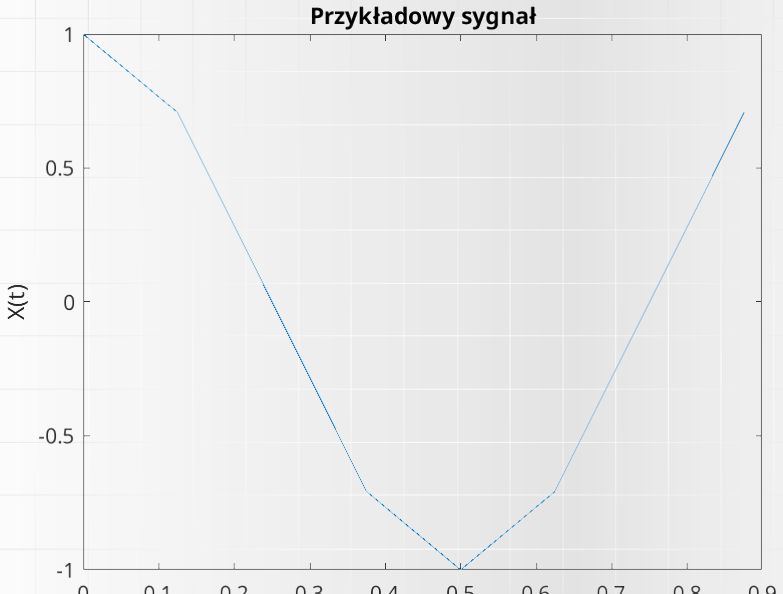
Gdy

```
b = sin(x);
w = fft(b)
w =
   0.0000 + 0.0000i  -0.0000 - 4.0000i   0.0000 - 0.0000i
   0.0000 - 0.0000i   0.0000 + 0.0000i   0.0000 + 0.0000i
   0.0000 + 0.0000i  -0.0000 + 4.0000i
```

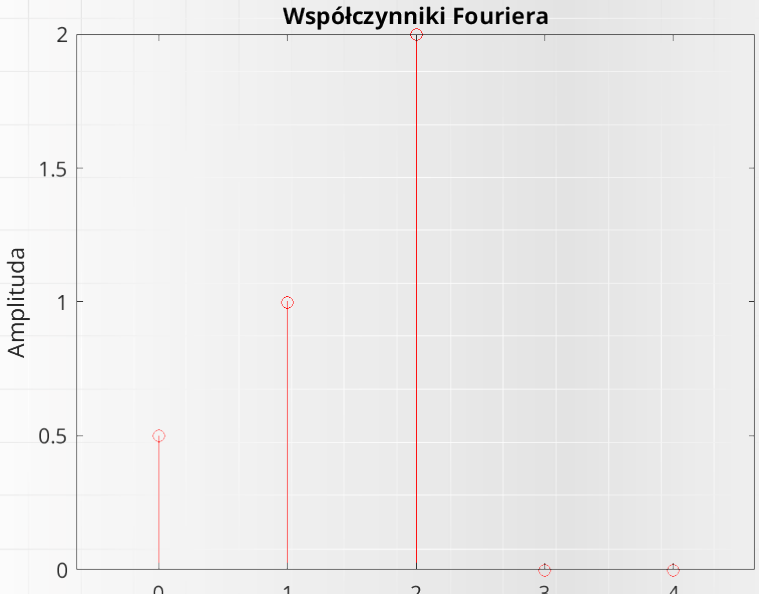
Jak popatrzeć na moduły `w` i `y` to są identyczne. (Tak, na prawdę *sinus* i *cosinus* to ta sama funkcja, jedynie przesunięta.)

Politechnika Wrocławska

Przykładowy sygnał



Współczynniki Fouriera



Politechnika Wrocławska

Interpretacja

Jak interpretować otrzymane wyniki

- Współczynniki trzeba **przeskalować**.
- Pierwszy współczynnik to wartość średnia.
- Otrzymane wartości są proporcjonalne do współczynników modułów funkcji, współczynnikiem proporcjonalności jest $\frac{N}{2}$.
- Kolejne współczynniki to wartości przed funkcjami *sinus* (część urojona) i *cosinus* (część rzeczywista).
- Częstotliwości tych funkcji są wielokrotnościami częstotliwości próbkowania.

Politechnika Wrocławska

Odwrotna transformata Fouriera

1. Mając współczynniki FFT można odtworzyć sygnał pierwotny używając funkcji `ifft()`
2. Można w ten sposób dokonać „filtracji (dla ubogich)" sygnału...
3. ...odrzucając wszystkie składowe o wartościach (co do modułu) mniejszych niż zadana wartość...

Dwuwymiarowa (prosta i odwrotna) transformata Fouriera

- Funkcje `fft2()` oraz `ifft2()` realizują przekształcenia, które można stosować do przekształcania i analizy obrazów.

Politechnika Wrocławska

Downsampling...

...albo upsampling

1. Mamy n pomiarów jakiegoś przebiegu
2. Interesuje nas takie ich przekształcenie, aby było ich
   - $N > n$ *upsampling*
   - $N < n$ *downsampling*
3. Czemu?
   - Chcemy ab N było potęgą dwójki
   - Pomiarów jest za dużo i chcemy je zredukować
   - chcemy mieć jednakowy okres próbkowania
4. Jak?

Interpolacja I

- Do tego służy interpolacja.
- Podstawowa funkcja w MATLABie to `interp1()`
- Podstawowe użycie

```
vq = interp1(x,v,xq,method)
```

`x` i `v` to są zmierzone wartości $\{(x_1, v_1), (x_2, v_2), \ldots, (x_n, v_n)\}$

`xq` to współrzędne x-owe punktów, w których chcemy znać wartości przebiegu `vq` ($\{(xq_1, vq_1), (xq_2, vq_2), \ldots, (xq_N, vq_N)\}$)

`method` to wybrana metoda interpolacji: `'linear'`, `'nearest'`, `'next'`, `'previous'`, `'pchip'`, `'cubic'`, `'v5cubic'`, `'makima'`, or `'spline'`. Gdy pominiemy — będzie linear.

Politechnika Wrocławska

Interpolacja II